7 प्राथमिक स्कूली गणित की महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

कमला मुकुन्दा



मनोवैज्ञानिकों द्वारा अब तक शुरुआती गणितीय क्षमताओं तथा अध्ययन के बारे में किए गए विविध शोधों में से, मैंने इस लेख के लिए दो आम विषयों को चुना हैः मानसिक संख्या रेखा का बुनियादी महत्व और प्राथमिक स्कूल में अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक अध्ययन के बीच सम्बन्ध (अक्सर तो सम्बन्ध की कमी)। मैं मानती हूँ, कि दोनों ही विषय उन लोगों के लिए खास रुचि के हैं जो 6 से लेकर 11 साल के आसपास तक की उम्र के बच्चों के साथ काम कर रहे हैं। वे एक तरह से उनमें आने वाले सालों के लिए अंकगणित व गणित की बुनियाद रख रहे हैं।

मानसिक संख्या रेखा

संज्ञानात्मक वैज्ञानिकों ने काफी निर्णायक रूप से पिछले कुछ दशकों में यह स्थापित कर दिया है कि मनुष्य होने के नाते हम चीजों को 'गिनने के लिए पैदा हुए हैं'। स्कूल–पूर्व उम्र वाले बच्चों के साथ किया गया कुछ सरल लेकिन शानदार काम यह दर्शाता है कि बच्चे 4–5 वर्ष की उम्र से पहले ही स्वाभाविक रूप से बुनियादी व महत्वपूर्ण संख्यात्मक कौशल विकसित कर लेते हैं और उनका अभ्यास करते हैं। इन कौशलों के विकास का ढंग बच्चों द्वारा भाषा सीखने के तरीके जैसा ही है। ऐसा प्रतीत होता है कि हमारे दिमागों में एक अन्तर्जात मॉड्यूल (कोष्ठ) है जो कि 'न्यूनतम' पर्यावरणीय सहयोग से हरकत में आ जाता है। प्रारम्भिक वर्षों की एक बेहद महत्वपूर्ण उपलब्धि होती हैः गिनने के कार्य में उपयोग की जानेवाली एक मानसिक संख्या रेखा (एमएनएल) की ठीक समझ और उसका उपयोग करने की क्षमता विकसित करना। यह कोई मामूली बात नहीं! जब कोई स्कूल–पूर्व उम्र का बच्चा चीजों के किसी समूह की गिनती करता है तो वह पाँच अत्यन्त महत्वपूर्ण सिद्धान्तों का उपयोग करता है–

1. प्रत्येक वस्तु और उसके संख्यानाम के बीच 'एक से एक का' सम्बन्ध होना चाहिए। उदाहरण के लिए, आप संख्या नाम 'चार' को एक से ज्यादा वस्तुओं को नहीं दे सकते।
2. लेकिन संख्याओं के नामों पर किसी भी तरह से किन्हीं खास वस्तुओं का अधिकार नहीं हो जाता; उन्हें फिर किसी दूसरी वस्तु को दिया जा सकता है। चीजों की पुनर्गणना करते वक्त, आप सारे सम्बन्धों को बदल सकते हैं।
3. संख्यानामों को एक निश्चित, अपरिवर्तनीय क्रम में कहना होता है। असल में, कई बच्चे संख्याओं को गलत क्रम में बोलते हैं एक, दो, तीन, पाँच, सात, आठ, नौ, दस! पर वे अपरिवर्तनीय ढंग से हमेशा ऐसा ही बोलते रहते हैं (जाहिर है तभी तक, जब तक वे अपने को सही नहीं कर लेते)।
4. बोली गई आखिरी संख्या हमेशा समूह का संख्या – आकार दर्शाती है।
5. गणना ऐसी प्रक्रिया है जो आप पिन से लेकर लोगों तक, वस्तुओं के किसी भी समूह के साथ कर सकते हैं।

समय के साथ, वे इस एमएनएल का उपयोग दो संख्याओं की तुलना करते वक्त यह बताने के लिए करते हैं कि उनमें कौन–सी बड़ी है, और जल्दी ही 'आगे गिनते जाने' के तरीके का इस्तेमाल करके सरल जोड़ करने लगते हैं। यानी, 4 और 2 को जोड़ने के लिए वे एमएनएल पर बड़ी संख्या 4 के साथ शुरु करते हैं और फिर दाईं ओर दो इकाइयाँ आगे बढ़कर 6 पर पहुँच जाते हैं। पाँच वर्षीय बच्चों को एमएनएल पर गिनती करने के साथ तुलना करने के अपने कौशलों को मिलाना सीखते वक्त सहज रूप से इस परिष्कृत ढंग को ईजाद करते देखा गया है।

जब बच्चे औपचारिक स्कूली पढ़ाई शुरु करते हैं, तो कुछ भी नया सीखने के लिए सामान्यतः उनके पास यह अनौपचारिक संख्या ज्ञान होना चाहिए। पर स्कूल शुरु करते वक्त सभी बच्चों की स्थिति एक–सी नहीं होती। अध्ययन दिखाते हैं (और जैसा किसी भी शिक्षक का अनुभव भी बताता है) कि पहली कक्षा में बच्चों के संख्या ज्ञान का स्तर अलग–अलग होता है। कुछ विद्यार्थी कई संख्या तथ्यों के ज्ञाता हो जाते हैं, जिसका अर्थ है कि वे स्मृति में बैठ गए तथ्यों, जैसे '4 + 2 = 6', को झट से स्मरण करके सवाल हल कर सकते हैं, और उन्हें फिर से उन संख्याओं को जोड़ना नहीं पड़ता। यह भी सम्भावना रहती है कि नए सवालों के आने पर ऐसे बच्चे आगे गिनते जाने जैसी विधियों का प्रयोग ज्यादा प्रभावशाली ढंग से कर सकते हैं। अन्य छात्र घाटे में रहते हैं क्योंकि उनके पास एमएनएल पर गिनती करने का पर्याप्त अभ्यास नहीं होता, और इसलिए उन्होंने सवाल हल करने की विधियाँ ईजाद नहीं की होतीं, जिसके चलते उनके पास पर्याप्त संख्या तथ्य नहीं होते।

बच्चों के बीच के इन अन्तरों को समझाने के लिए कई कारण बताए गए हैं । पर मनोवैज्ञानिक इस अन्तर को कम से कम समय में दूर करने के तरीकों पर काम कर रहे हैं, ताकि कमजोर बच्चों को भी गणित के लिए जरूरी उनकी बुनियाद निर्मित करने में मदद की जा सके। सबसे जाहिर सुझाव है कि एमएनएल की अवधारणा और उसके गुणों की सरल और स्पष्ट व्याख्या को पहली कक्षा के पाठ्यक्रम में शामिल किया जाना चाहिए, क्योंकि

सामान्यतः इसे इस तरीके से नहीं पढ़ाया जाता। दिलचस्प बात है कि संख्यात्मक क्षमता के इन शुरुआती अन्तरों की सबसे मजबूत सम्बन्धित कड़ियों में से एक होती है स्कूल में दाखिल होनेवाले बच्चे का सामाजिक–आर्थिक दर्जा (एसईएस)। संख्या ज्ञान के मामले में मध्यम या ऊँचे एसईएस वाले बच्चों की तुलना में निचले एसईएस वाले बच्चे काफी पिछड़े रहते हैं। ध्यान न दिए जाने पर, यह अन्तर समय के साथ और बढ़ता जाता है। विकासवादी मनोवैज्ञानिक रॉबर्ट सीगलर और गीता रमानी इस अन्तर के लिए जिम्मेदार एक रोचक कारण को सामने लाते हैं: निचली एसईएस वाले बच्चों को गत्ते वाले ऐसे खेल खेलने को नहीं मिलते जो दूसरे बच्चे अक्सर खेला करते हैं। गत्ते के कई सरल खेलों (जैसे साँप–सीढ़ी या लूडो) का मुख्य अवयव रैखिक क्रम में व्यवस्थित, संख्यावाले खाने होते हैं। आप हर चाल के लिए प्राप्त संख्या के हिसाब से अपनी गोटी को, एक–एक खाना गिनते हुए, कुछ निश्चित खाने आगे बढ़ाते हैं। इन लोगों का कहना है कि ऐसे खेल खेलने से स्कूल–पूर्व उम्र के बच्चों को एमएनएल की सही समझ विकसित करने के लिए सही उद्दीपन मिलता है।

एक हालिया शोध में, सीगलर और रमानी ने अमरीका में निचले और मध्यम स्तर के एसईएस पृष्ठभूमियों वाले ढेर सारे बच्चों के साथ काम किया। पहले तो उन्होंने नीचे दिए गए इस सरल कार्य के द्वारा इस सामान्य जानकारी की पुनः पुष्टि की कि निचले एसईएस वाले बच्चे संख्यात्मक परिमाण के आकलन में काफी बुरा प्रदर्शन करते हैं: एक रेखा दी गई है जिसके एक सिरे पर 0 और दूसरे सिरे पर 100 है, अब एक तीसरी संख्या (मान लीजिये 37) को इस रेखा पर सही जगह रखिए। इसके बाद उन्होंने निचले एसईएस वाले बच्चों को रैखिक तौर पर व्यवस्थित सिर्फ दस खानों वाले एक बेहद बुनियादी गत्ते के खेल को करीब 30 बार थोड़े–थोड़े समय के लिए खिलवाया। इस प्रयास में लगा कुल समय सिर्फ करीब दो घण्टे था, लेकिन इसके उपरान्त फिर किए गए परीक्षणों से प्रगट हुआ कि ये छात्र तेज छात्रों के करीब–करीब 'समकक्ष' आ गए। निश्चित ही, इस अध्ययन को भारत में फिर से दोहराए जाने की जरूरत है। पर शुरुआती अंकगणित के लिए एमएनएल के महत्व, और इस प्रयास की सरलता को देखते हुए इसकी पड़ताल करना अवश्य ही उपयोगी होगा।

अवधारणाओं को कार्यविधियों के साथ जोड़ना

संख्याविधियों और अवधारणात्मक समझ के बीच की खाई काफी चौड़ी है। संख्या विधियों का एक उदाहरण है गुणन का लम्बा तरीका, जहाँ हमें सिखाया जाता है दाईं तरफ से शुरू करना, और बाईं तरफ बढ़ते हुए कार्य करना, गुणनफलों को एक के बाद एक, बाईं तरफ एक स्थान खिसकाते हुए लिखते जाना और अन्त में सबको जोड़ देना..। प्राथमिक स्कूली गणित, नियमों की ऐसी ही प्रणालियों से भरी पड़ी है। पर छात्र आपको यह नहीं बता पाते (क्योंकि उन्हें पता ही नहीं होता) कि ये प्रणालियाँ क्यों काम कर जाती हैं। दिलचस्प बात है कि ऐसा लगता है जैसे एक अवधारणा पढ़ाना (ठोस वस्तुओं इत्यादि का इस्तेमाल करके), फिर सवाल हल करने की एक कार्यविधि से परिचय करवाना, फिर उसका ढेर सारा अभ्यास करवाना – और विधि समझा देने के बाद उस मूल अवधारणा को बिरले ही याद करना – यह सब काफी नहीं होता। ऐसा मालूम पड़ता है कि शिक्षकगण बच्चों को किसी भी कार्यविधि का सम्बन्ध ठोस अवधारणा के साथ स्पष्ट रूप से जोड़कर दिखाने में अपेक्षाकृत कम समय व ऊर्जा लगाते हैं, हालाँकि ऐसा करने से ही बच्चों को यह समझ आ सकता है कि यह विधि यहाँ क्यों काम कर जाती है। हम क्यों ''दाईं तरफ से शुरू करते हैं, बाईं ओर को काम करते हैं, एक के बाद एक गुणनफलों को बाईं तरफ एक स्थान खिसकाकर लिखते जाते हैं, और फिर सबको जोड़ देते हैं'' इसकी जटिलता को देखते हुए इस सम्बन्ध को एक बार, या दो बार भी समझा देना काफी नहीं प्रतीत होता।

> *''हम क्यों दाईं तरफ से शुरू करते हैं, बाईं ओर को काम करते हैं, एक के बाद एक गुणनफलों को बाईं तरफ एक स्थान खिसकाकर लिखते जाते हैं, और फिर सबको जोड़ देते हैं''?*

अब आप सोच में पड़ सकते हैं कि यह सम्बन्ध इतना महत्वपूर्ण क्यों है। खोजने पर यह पता चलता है कि गणितीय अवधारणाओं को कार्यविधियों के साथ बहुत ही स्पष्ट रूप से जोड़ने के पक्ष में मजबूत तर्क हैं। एक तो यह कि इस प्रक्रिया में अवधारणात्मक समझ भी अपने आप मजबूत हो जाएगी। वस्तुतः प्रक्रियात्मक व अवधारणात्मक शिक्षा के बीच आगे–पीछे जोड़ने वाली प्रक्रिया निरन्तर चलती रहनी चाहिए। किसी प्रक्रिया के उपयोग पर विचार करना, पूछना कि क्या कुछ खास प्रक्रियाएँ काम करती हैं और क्या कुछ दूसरी गलत हैं, और ऐसा क्यों है, यह सब अवधारणा की हमारी समझ को और मजबूत बनाता है। ऐसा करने का एक और अच्छा कारण यह है कि परिकल्पना और प्रक्रिया का अन्तर्सम्बन्धित होना इसलिए भी जरूरी है ताकि वह प्रक्रिया नए

सवालों में लचीले ढंग से अपनाई जा सके। और तीसरा कारण यह है कि सवाल हल करने की किसी अंकगणितीय विधि में होने वाली गलतियों को ऐसी ही समझ के द्वारा सुधारा जा सकता है, बजाय बार–बार यह याद दिलाने के कि ''इसे कैसे किया जाना चाहिए।''

मनोवैज्ञानिक लॉरेन रैसनिक ने 1982 में दूसरी और तीसरी कक्षा में पढ़ रहे चार विद्यार्थियों का गहराई से बहुत सुन्दर अध्ययन किया, और निर्णायक रूप से यह दर्शाया कि उन बच्चों के संख्या ज्ञान और उनके अवधारणात्मक कौशलों के बीच कोई सह सम्बन्ध नहीं था। बच्चों के दिमागों में ज्ञान के ये दो समूह बहुत साफ–सुथरे ढंग से एक दूसरे से अलग–थलग थे। महत्वपूर्ण बात यह थी कि उन्होंने पाया कि विद्यार्थी इन दोनों के बीच सम्बन्धों को स्वाभाविक ढंग से पहचान नहीं पा रहे थे। इसके बाद उन्होंने कई अंकों वाली संख्याओं का घटाना सिखाने के लिए खण्डों और संख्या संकेतों का साथ–साथ उपयोग करने वाले एक 'मानचित्रण शिक्षण' तरीके को विकसित किया। खण्ड 100, 10 और 1 आकार के थे, और प्रत्येक चरण पर खण्डों की एक खास व्यवस्था प्रस्तुत की जाती थी और साथ में विधि का सम्बन्धित चरण भी होता था। लिखित संगणना में खण्ड व्यवस्था का एक ब्यौरा था, और खण्ड व्यवस्थाएँ लिखित संगणना की पुष्टि करती थीं। उनकी इस अध्यापन विधि की कुल अवधि मात्र 40 मिनिट थी। इस लघु और सरल प्रयास के फलस्वरूप बच्चों में विधियों का सही उपयोग करने में और साथ ही शब्दों में यह समझा पाने में कि चीजें किसी खास ढंग से ही क्यों काम करती हैं, बहुत ज्यादा सुधार हो गया। यहाँ हम फिर से देखते हैं कि हमारे शिक्षण में, खासतौर पर प्राथमिक स्कूली परिस्थितियों में, अपेक्षाकृत छोटी पर अच्छे से तैयार की गई प्रायोगिक सामग्री जोड़ देने का बहुत गहरा असर हो सकता है।

लेख में आए सन्दर्भः

1. Lauren B. Resnick, 1982. Syntax and Semantics in Learning to Subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser and T. A. Romberg, eds.,
2. Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Erlbaum.
3. Geetha B. Ramani and Robert S. Siegler, 2008. Board Games and Numerical Development, Child Development, Vol. 79 (2).
4. Siegler has a website that provides almost all his publications for free download:
   http://www.psy.cmu.edu/~siegler/publications-all.html

कमला मुकुन्दा *ने शैक्षणिक मनोविज्ञान का अध्ययन किया और फिर 1995 में सेन्टर फॉर लर्निंग से जुड़ गईं, जहाँ वे उत्साही साथियों के समूह के साथ कार्य करती हैं। वे गणित, सांख्यिकी, मनोविज्ञान, पढ़ाती हैं और माध्यमिक स्कूल के बच्चों को पढ़ाकर बहुत ऊर्जा अनुभव करती हैं। वे बाल विकास और शिक्षा पर केन्द्रित किताब ''व्हॉट डिड यू आस्क ऐट स्कूल टुडे?'' की लेखिका हैं। उनसे* kamla.mukunda@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*